الهندسة

الدرس الأول تعاريف ومفاهيم أساسية

تعاريف ومفاهيم أساسية على الدائرة:

الدائرة:

الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.

النقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة والبعد الثابت يسمى طول نصف قطر الدائرة (نق)، ونرمز للدائرة عادة بمركزها فنقول الدائرة م تعنى الدائرة التى مركزها م.

تقسيم المستوى بالدائرة:

فى الشكل المقابل نجد أن الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط:

- مجموعة النقط داخل الدائرة مثل: {هـ، م، ء، ......}
- مجموعة النقط على الدائرة مثل: {أ، ب، جـ، ......}
- مجموعة النقط خارج الدائرة مثل: {ى، ك، ......}

سطح الدائرة:

هو مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة اتحاد مجموعة النقاط الواقعة على الدائرة.

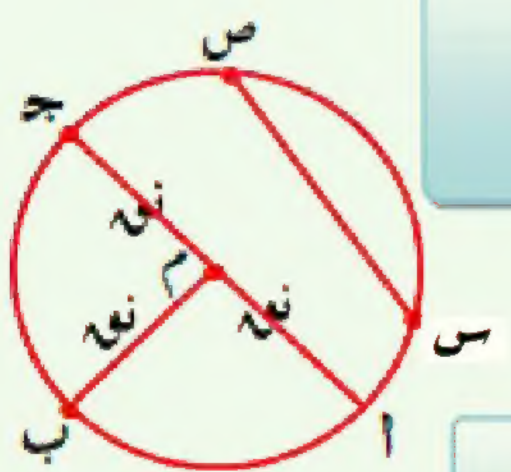
سطح الدائرة = مجموعة النقاط داخل الدائرة ∪ مجموعة النقاط الواقعة على الدائرة

نصف قطر الدائرة:

هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة على الدائرة.

مثل م‌أ، م‌ب، م‌جـ حيث م‌أ = م‌ب = م‌جـ = نق

الوتر:



هو القطعة المستقيمة التي طرفاها(نهايتاها) أي نقطتين على الدائرةمثل:

س‌ص، أ‌جـ

القطر:

هو وتر يمر بمركزها مثل أ‌جـ ، طول القطر = ٢نق

محيط الدائرة ومساحة سطح الدائرة:

محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢}

التماثل في الدائرة

أي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها.

لاحظ أن:

الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل.

نتائج هامة على الدائرة

نتيجة ١

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديًا على هذا الوتر.

فى الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م، جـ في منتصف $\overline{أب}$

فإن المستقيم ل $\perp$ $\overline{أب}$

نتيجة ٢

المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.

فى الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م، ل $\perp$ $\overline{أب}$

فإن جـ في منتصف $\overline{أب}$.

نتيجة ٣

المستقيم العمودى على أي وتر في الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة.

فى الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل $\perp$ $\overline{أب}$ ، جـ في منتصف $\overline{أب}$

فإن المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م.

الدرس الثانى: أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

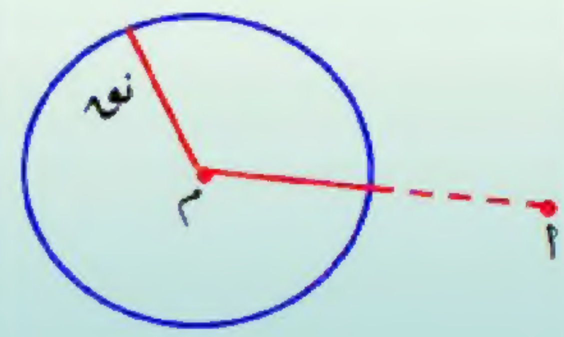
أولًا: وضع نقطة بالنسبة لدائرة:

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، وكانت أ نقطة فى مستوى الدائرة، فإن:

① أ تقع خارج الدائرة

إذا كان:

أم > نق والعكس صحيح



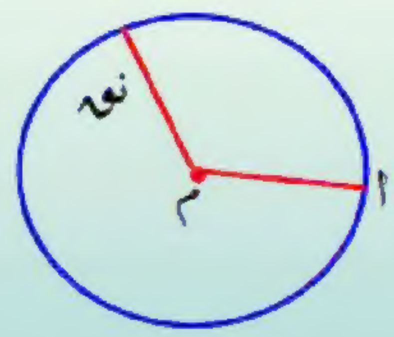
{أ} ∩ الدائرة م = ∅

{أ} ∩ سطح الدائرة م = ∅

② أ تقع على الدائرة

إذا كان:

أم = نق والعكس صحيح



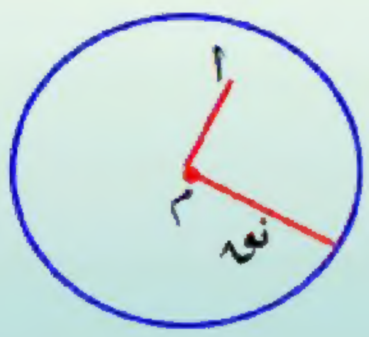
{أ} ∩ الدائرة م = {أ}

{أ} ∩ سطح الدائرة م = {أ}

③ أ تقع داخل الدائرة

إذا كان:

أم < نق والعكس صحيح



{أ} ∩ الدائرة م = ∅

{أ} ∩ سطح الدائرة م = {أ}

ثانيًا: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق،

ل مستقيم فى مستواها، م أ ⊥ ل حيث م أ ∩ ل = {أ} فإن:

① المستقيم ل يقع خارج الدائرة م

إذا كان: م أ > نق

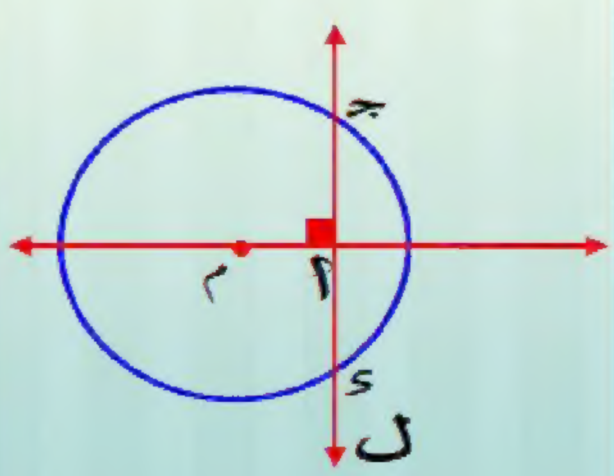
والعكس صحيح

- ل ∩ الدائرة م = ∅
- ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

② المستقيم ل قاطع للدائرة م

إذا كان: م أ < نق

والعكس صحيح

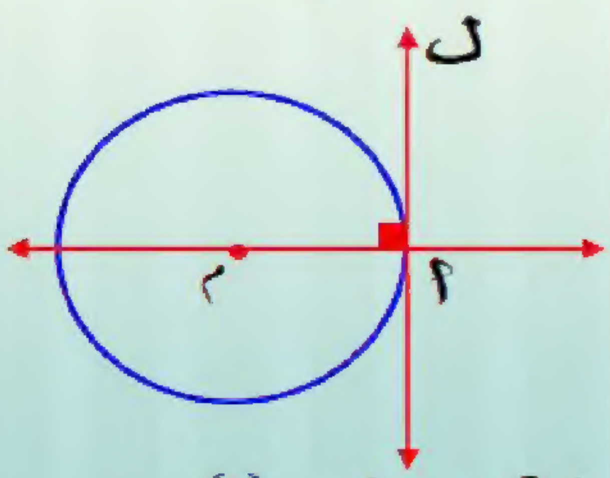


- ل ∩ الدائرة م = {جـ، د}
- ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{جـ د}}$

③ المستقيم ل مماس للدائرة م عند نقطة أ

إذا كان: أ م = نق

والعكس صحيح



ل ∩ الدائرة م = {أ}

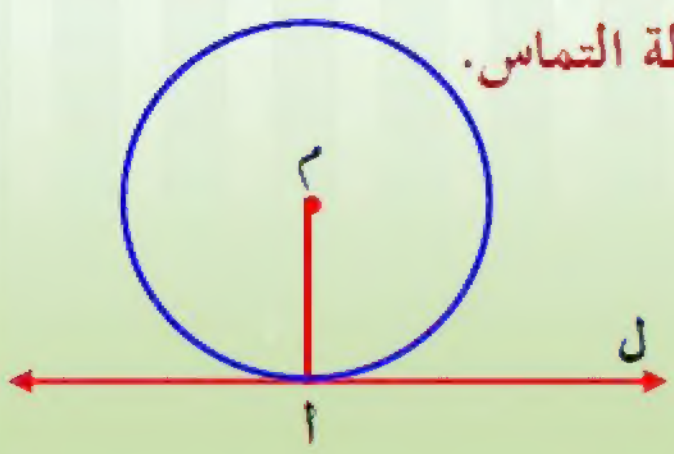
ل ∩ سطح الدائرة م = {أ}

أ تسمى نقطة التماس

حقائق هامة

حقيقة ١

المماس للدائرة يكون عموديًّا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

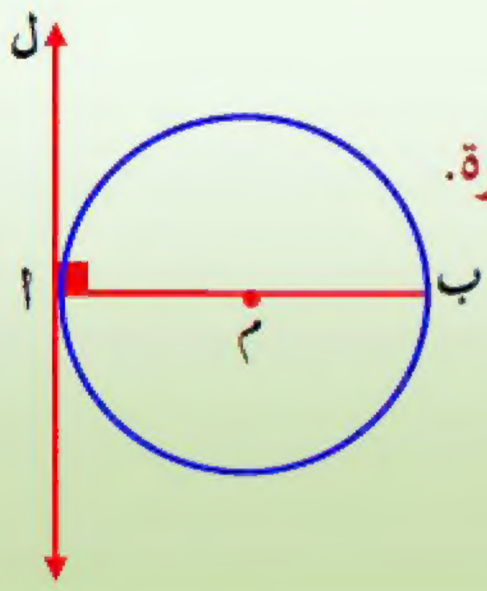


أى أنه إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م عند النقطة أ

∴ $\overline{\text{م أ}}$ $\perp$ المستقيم ل

حقيقة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًّا للدائرة.



أى أنه إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطرًا فى الدائرة م ،

المستقيم ل $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ عند النقطة أ

فإن: المستقيم ل مماس للدائرة عند أ

العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتى أى قطر فيها

المماسين لدائرة المرسومين من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيين

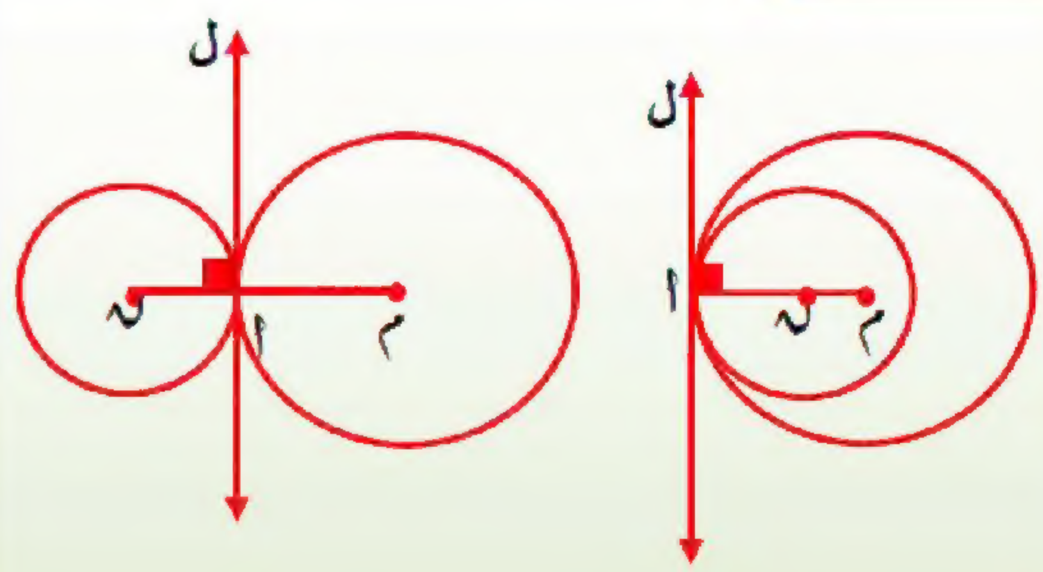
تلخيص

◂ لتحديد وضع دائرتين م، ن طولا نصفى قطريهما نق_1، نق_2 على الترتيب حيث $\text{نق}_1 > \text{نق}_2$:

1. ▪ إذا كان $\text{م ن} > \text{نق}_1 + \text{نق}_2$ الدائرتان متباعدتان.
   ▪ إذا كان $\text{م ن} = \text{نق}_1 + \text{نق}_2$ الدائرتان متماستان من الخارج.
2. ▪ إذا كان $\text{م ن} < \text{نق}_1 - \text{نق}_2$ الدائرتان متداخلتان.
   ▪ إذا كان $\text{م ن} = \text{نق}_1 - \text{نق}_2$ الدائرتان متماستان من الداخل.
3. ▪ إذا كان $\text{نق}_1 - \text{نق}_2 < \text{م ن} < \text{نق}_1 + \text{نق}_2$ الدائرتان متقاطعتان.
   أى أن $\text{م ن} \in]\text{نق}_1 - \text{نق}_2 ، \text{نق}_1 + \text{نق}_2[$

نتائج

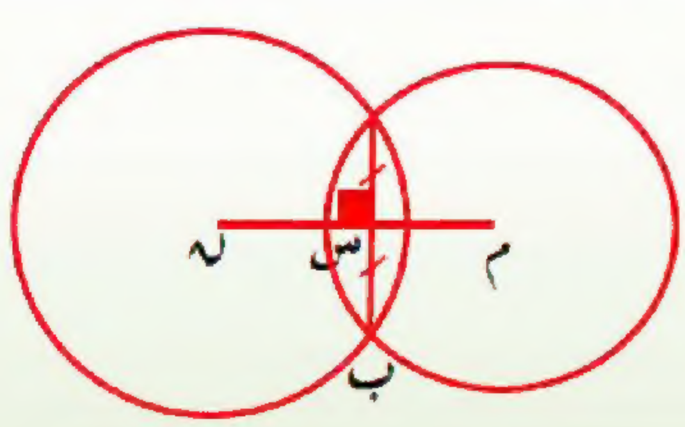
نتيجة ١



1. خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس، ويكون عموديًّا على المماس المشترك.

$$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \text{ل}$$

نتيجة ٢



2. خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك وينصفه.

$$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}} \text{ ، } \text{أ س} = \text{ب س}$$

أى أن: $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$

الدرس الثالث تعيين الدائرة

كيفية رسم الدائرة

يمكن رسم دائرة بشروط معطاه،وهى إذا علمنا:

مركز الدائرة و طول نصف قطر الدائرة

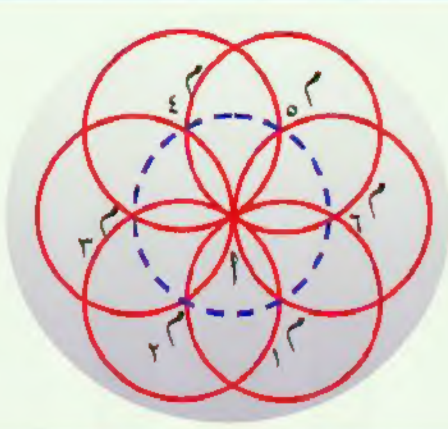
أولًا رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

قاعدة هامة

يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ

قاعدة هامة

إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متســاوية فى الطول ، فإن مراكزها تقع على دائرة مطــابقة لها ومركزها النقطة أ



ملاحظات مهمة

1. يوجد عدد لا نهائى من الدوائر ، تمر بنقطتين معلومتين مثل أ،ب ومراكز هذه الدوائر تقع جميعها على محور تماثل $\overline{أب}$.
2. طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكى تمر بالنقطتين أ،ب يكون مساويًا $\frac{1}{2}$ أب .
3. إذا كان طول نصف قطر الدائرة أصغر من $\frac{1}{2}$ أب فلا يمكن رسم أى دائرة تمر بالنقطتين أ،ب .
4. عند كل قيمة أكبر من $\frac{1}{2}$ أب يمكن رسم دائرتين فقط تمران بالنقطتين أ،ب .
5. لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين.

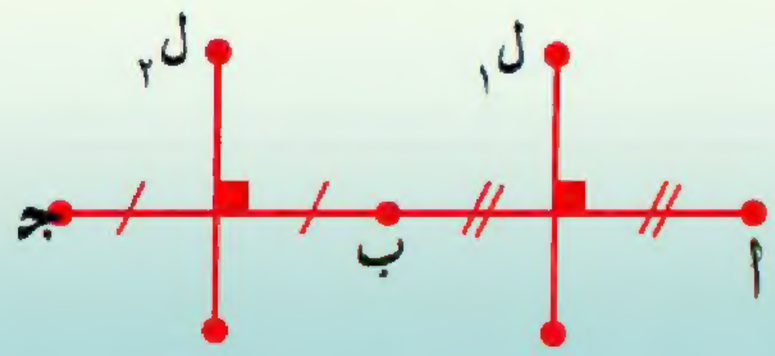
ثالثًا رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:

قاعدة هامة

أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائرة وحيدة

ملحوظة هامة

لايمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ،ب،جـ ،حيث أ،ب،جـ على استقامة واحدة لأن $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$
أى لا يمكن تعيين مركز الدائرة (م)



نتائج هامة

1. الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى دائرة خارجة للمثلث.
2. الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث.

ملحوظة هامة

موقع مركز الدائرة الخارجة للمثلث وليكن ((نقطة م))

المثلث الحاد الزوايا	م تقع داخل المثلث
المثلث القائم الزاوية	م تقع فى منتصف الوتر
المثلث المنفرج الزاوية	م تقع خارج المثلث

حالة خاصة

مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه، وهى نقطة متوسطاته، وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة، وهى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

ملحوظة هامة

يمكن رسم دائرة خارجة تمر برءوس كل من:

- أى مثلث
- المربع
- المستطيل
- شبه المنحرف المتساوى الساقين
- أى مضلع منتظم

ولا يمكن رسم دائرة تمر برءوس كل من متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير متساوى الساقين.

الدرس الرابع علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية

الأوتار المتساوية الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.

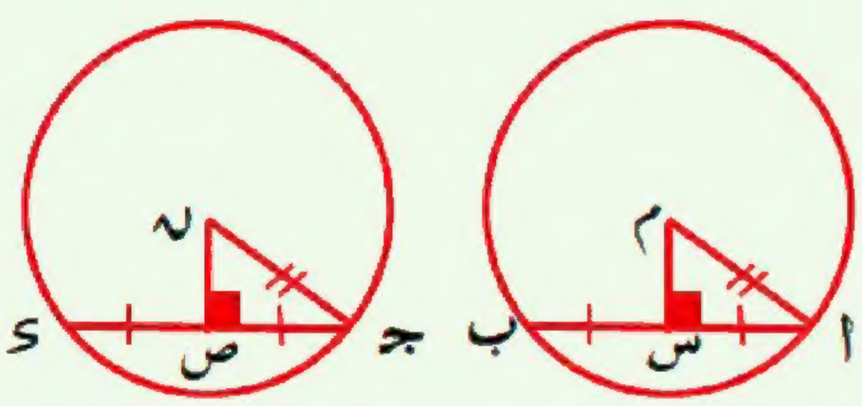
نتيجة

الأوتار المتساوية الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز.

فى الشكل المقابل: م،ن دائرتان متطابقتان

إذا كان أب = جـء، مس ⊥ أب، نص ⊥ جـء

فإن مس = نص



عكس النظرية (بدون برهان)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول.

الدرس الأول الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الأقواس فى الدائرة

لأى نقطتين على الدائرة مثل أ،ب

الخط المنحنى الواصل من أ إلى ب يسمى القوس أب

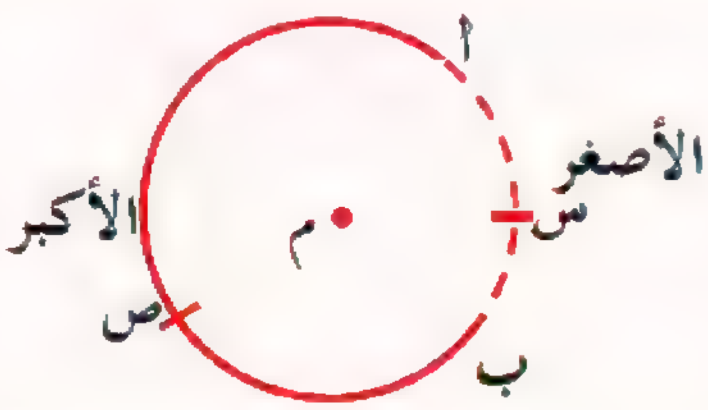
ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أب}}$

ملحوظة

النقطتان أ،ب على الدائرة م يقسمان الدائرة إلى جزأين

القوس ($\overset{\frown}{\text{أسب}}$) يقصد به القوس الأصغر ($\overset{\frown}{\text{أب}}$)

القوس ($\overset{\frown}{\text{أصب}}$) يقصد به القوس الأكبر ($\overset{\frown}{\text{أب}}$)



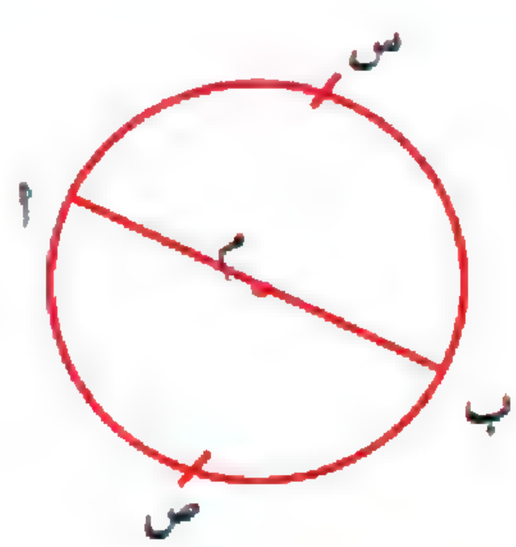
لاحظ أن:

إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قطراً فإن:

∠ أ م ب تكون زاوية مستقيمة

ويكون ($\overset{\frown}{\text{أسب}}$) يطابق ($\overset{\frown}{\text{أصب}}$)

ويسمى كل منهما « نصف دائرة »



لاحظ أن:

دائمًا يقصد بالرمز أب القوس الأصغر أب ما لم يذكر خلاف ذلك.

الزاوية المركزية وقياس القوس

◂ **الزاوية المركزية:**

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ويحمل كل من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.

◂ قياس القوس:

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له.

ملحوظة

القوسان المتجاوران هما قوسان من دائرة يشتركان فى نقطة واحدة فقط

◂ قياس القوس بمعلومية نسبة ما يمثله من الدائرة:

قياس القوس = نسبة ما يمثله القوس × ٣٦٠°

حيث إن قياس الدائرة = ٣٦٠°

فمثلًا: قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ قياس الدائرة = $\frac{١}{٦}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

لاحظ أن

* قياس الدائرة = ٣٦٠°
* قياس نصف الدائرة = ١٨٠°
* قياس ربع الدائرة = ٩٠°
* قياس أى قوس = نسبة ما يمثله من الدائرة × ٣٦٠°

◂ طول القوس:

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$$

ملحوظة:

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$ × محيط الدائرة

قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ × ٣٦٠°

لاحظ أن

طول الدائرة = ٢πنق ، طول نصف الدائرة = πنق ، طول ربع الدائرة = $\frac{١}{٢}\pi$نق

نتائج هامة

نتيجة (١)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح.

نتيجة (٢)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس تكون أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح.

نتيجة (٣)

الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.

نتيجة (٤)

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.

الدرس الثاني: العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس

الزاوية المحيطية:

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا فى الدائرة.

نظرية (١)

- قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

لاحظ أن

قياس الزاوية المركزية يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.

نتائج على النظرية وتمارين مشهورة:

نتيجة (١)

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها.

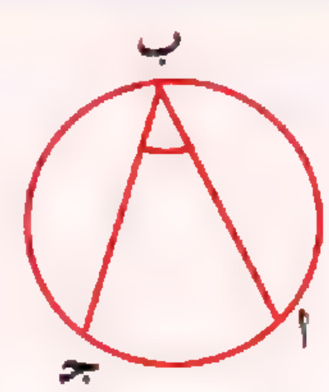
ملاحظة هامة:

قياس القوس يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية التى تحصره.

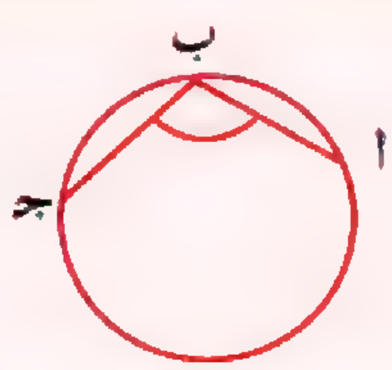
نتيجة (٢)

الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة.

ملحوظة:



(١) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أصغر من نصف الدائرة (المرسومة فى قطعة أكبر من نصف الدائرة) تكون حادة.



(١) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أكبر من نصف الدائرة (المرسومة فى قطعة أصغر من نصف الدائرة) تكون منفرجة.

تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع القوسين المقابلين لها.

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرةٍ خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا الزاوية.

الدرس الثالث: الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية (٢)

◄ الزوايا المحيطية التى تحصرُ نفسَ القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس.

نتيجة

الزوايا المحيطية التى تحصرُ أقواسًا متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) متساوية فى القياس

لاحظ:

(١) فى الدائرة م :

إذا كان ق $(\widehat{\text{أجـ}})$ = ق $(\widehat{\text{د و}})$

فإن ق (∠ب) = ق (∠هـ)

(٢) لأى دائرتين متطابقتين م، ن

إذا كان ق $(\widehat{\text{أجـ}})$ = ق $(\widehat{\text{د و}})$

فإن ق (∠ب) = ق (∠هـ)

عكس النظرية السابقة صحيح، أى ان:

◄ الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) تحصر أقواسًا متساوية فى القياس.

عكس نظرية (٢)

◄ إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها، فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.

الهندسة

الدرس الرابع الشكل الرباعي الدائري

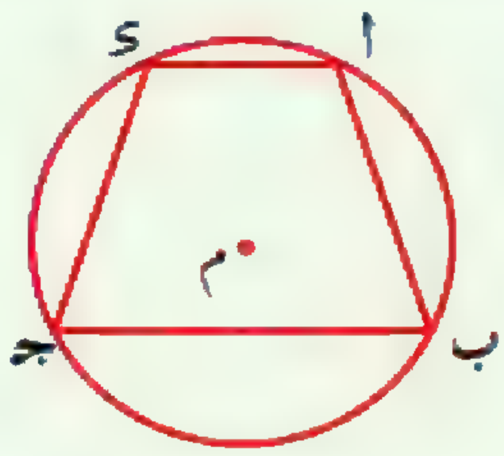
تعريف

◄ الشكل الرباعي الدائرى هو شكل رباعي تنتمى رءوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

فى الشكل المقابل:

الشكل أب جـ ء رباعي دائرى؛ لأن رءوسه الأربعة

أ، ب، جـ، ء تنتمى للدائرة م



ملاحظات هامة

(١) فى الشكل الرباعى الدائرى:

كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس.

مما سبق نستنتج أن

من الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائريًا:

الحالة الأولى: إذا وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس كان هذا الشكل رباعيًا دائريًا.

الحالة الثانية: إذا وجدت نقطة فى المستوى تبعد مسافات متساوية عن جميع رءوس الشكل الرباعى كان هذا الشكل رباعيًا دائريًا.

إذا كان الشكل الرباعى دائريًا، فإن هذا يعنى أنه توجد نقطة فى المستوى تبعد مسافات متساوية عن جميع رءوس الشكل الرباعى، وهذه النقطة تمثل مركز الدائرة التى تمر برءوس هذا الشكل الرباعى.

الدرس الخامس: خواص الشكل الرباعي الدائري

نظرية (٣)

إذا كان الشكلُ الرباعيُّ دائريًّا فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

نتيجة:

◂ قياس الزاوية الخارجة عند رأس من رءوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

عكس نظرية (٣)

إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان هذا الشكل رباعيًّا دائريًّا.

نتيجة:

◂ إذا وجدت زاوية خارجة عند رأس من رءوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًّا دائريًّا.

◂ ملخص الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائريًّا:

يكون الشكل الرباعى دائريًّا إذا تحققت إحدى الحالات الآتية:

(١) إذا وجدت نقطة فى المستوى على أبعاد متساوية من رءوس الشكل الرباعى.

(٢) إذا وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة فى جهة واحدة منها، ومتساويتان فى القياس.

(٣) إذا زاويتان متقابلتان متكاملتان (أى مجموع قياسيهما = ١٨٠°)

(٤) إذا وجدت زاوية خارجة عند رأس من رءوس الشكل الرباعى وتساوى فى القياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.

ملاحظات هامة

(١) المربع، والمستطيل، وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية.

(٢) المعين، ومتوازى الأضلاع، وشبه المنحرف غير متساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية.

الدرس السادس: العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية (٤)

◄ **القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.**

نتيجة (١):

◄ **المستقيم المارُّ بمركز دائرة، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محورًا لهذين المماسين.**

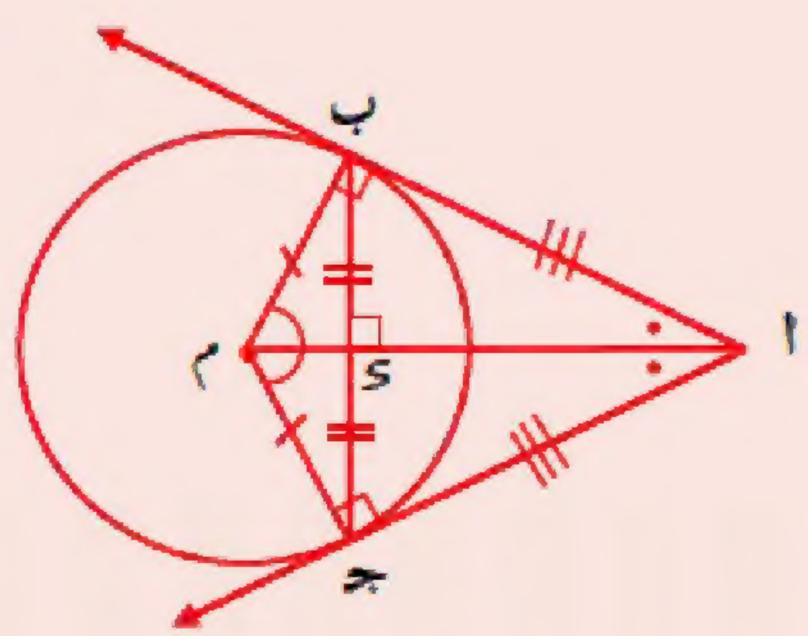
نتيجة (٢):

◄ **المستقيم المارُّ بمركز دائرة، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين، كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.**

ملاحظات هامة:

فى الشكل المقابل:

إذا كانت: $\overline{\text{اب}}$،$\overline{\text{اجـ}}$ قطعتين مماسيتين للدائرة م عند ب،جـ، فإن:



(١) مب = مجـ = نق

(٢) اب = اجـ

(٣) بء = جـء

(٤) $\overline{\text{ام}} \perp \overline{\text{بجـ}}$

(٥) (∠ابم) = (∠اجـم) = ٩٠°

(٦) الشكل ابمجـ رباعى دائرى.

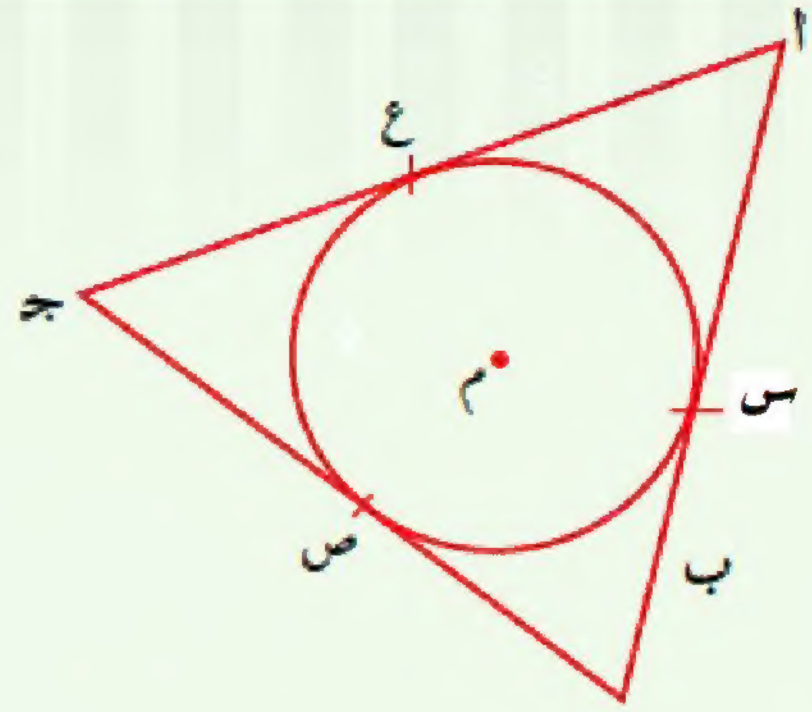
(٧) (∠بام) = (∠بجـم) = (∠جـام) = (∠جـبم)

(٨) (∠امب) = (∠اجـب) = (∠امجـ) = (∠ابجـ)

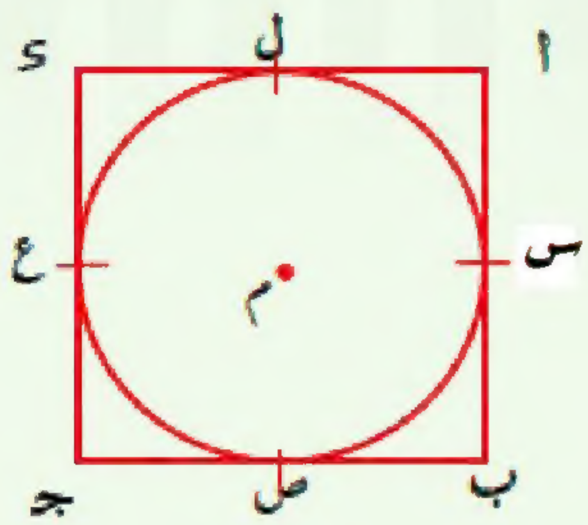
◄ الدائرة الداخلة لمضلع:

تعريف

◄ الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس جميع أضلاع المضلع من الداخل.



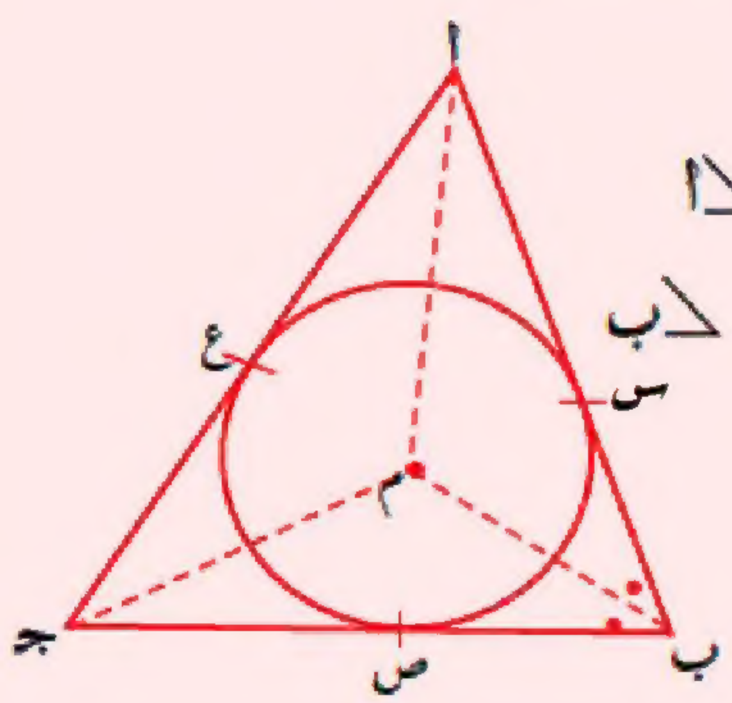
م الدائرة الداخلة للمثلث ا ب جـ



م الدائرة الداخلة للمضلع ا ب جـ ى

ملاحظات هامة

◄ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخله.



الإثبات: فى الشكل المقابل:

∵ ا س، ا ع قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ا م ينصف ∠ا

وبالمثل ب س، ب ص قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب م ينصف ∠ب

وبالمثل جـ م ينصف ∠جـ

∴ ا م، ب م، جـ م ثلاث منصفات للزوايا الداخلة للمثلث ا ب جـ

تتقاطع جميعًا فى مركز الدائرة.

تعريف

◄ يُقال للمماس المشترك لدائرتين بأنه مماس مشترك داخلي إذا كانت الدائرتان تقعان فى جهتين مختلفتين منه.

◄ يُقال للمماس المشترك لدائرتين بأنه مماس مشترك خارجي إذا كانت الدائرتان تقعان فى جهة واحدة منه.

الدرس السابع الزاوية المماسية

تعريف

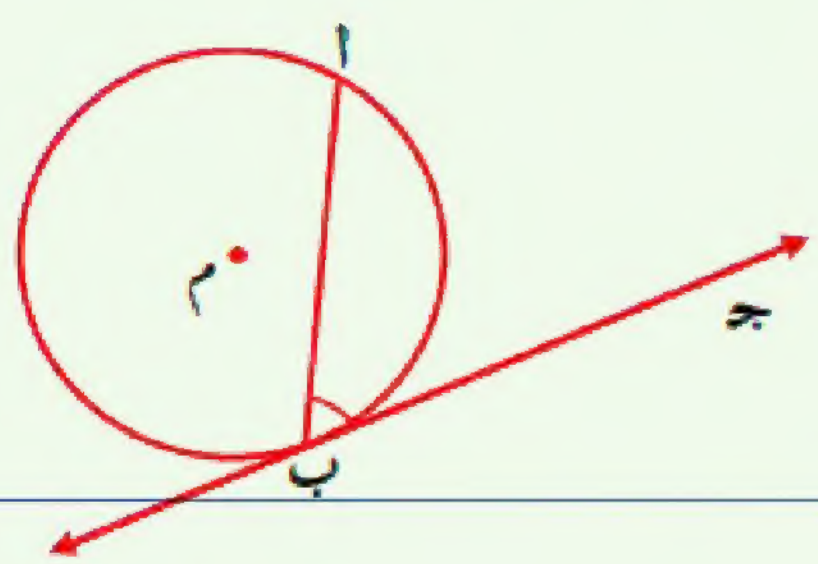
◄ **الزاوية المماسية:** هى الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين، أحدهما مماس للدائرة والآخر يحمل وترًا فى الدائرة يمر بنقطة التماس.

نتيجة:

◄ قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

• $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس فإن:

$$ق(\angle أبجـ) = \frac{1}{2} ق(\widehat{أب})$$



نظرية (٥)

◄ قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.

نتيجة:

◄ قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

ملاحظات هامة

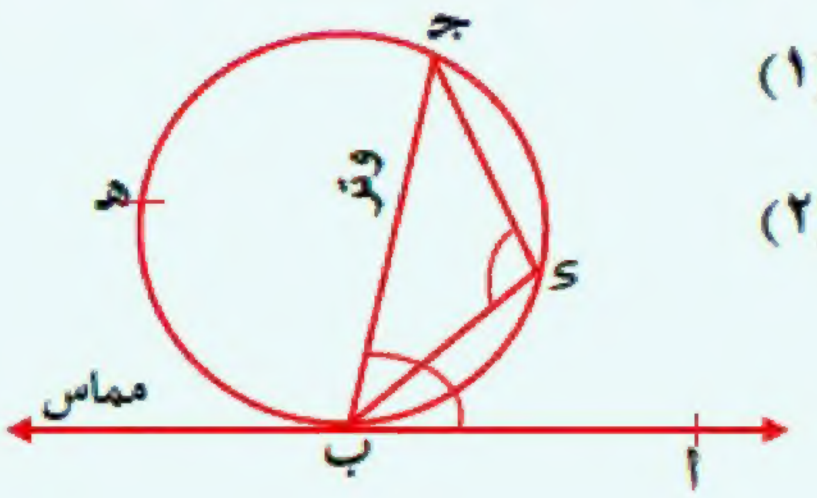
◂ الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه.

في الشكل المقابل:

∠جـ ب أ زاوية مماسية وترها $\overline{\text{جـ ب}}$، ∠جـ ى ب زاوية محيطية وترها $\overline{\text{جـ ب}}$

$\therefore$ ق(∠جـ ب أ) $= \frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ى ب}}$) (١)

، ق(∠جـ ى ب) $= \frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ هـ ب}}$) (٢)



بجمع (١) ، (٢) ينتج أن:

ق(∠جـ ب أ) + ق(∠جـ ى ب)

$= \frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{جـ ى ب}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{جـ هـ ب}}$)] $= \frac{1}{2} \times$ ٣٦٠° = ١٨٠°

عكس نظرية (٥)

◂ إذا رُسم شعاعٌ من أحد طرفى وتر فى دائرة بحيث كان قياسُ الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسًّا للدائرة.

أى أنه:

إذا رسم $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ من أحد طرفى الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ فى الدائرة م وكان :

ق(∠ى أ ب) = ق(∠جـ) فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ مماس للدائرة م.